

Priprave na MMO 2026 – 3. domača naloga

1. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik in naj bosta I in J zaporedoma središči trikotnikoma ABC in DBC včrtanih krožnic. Dokaži, da je štirikotnik $IJBC$ tetiven.
2. Naj bo $AXYZB$ konveksni petkotnik včrtan v polkrožnico s premerom AB , O pa razpolovišče daljice AB . S P , Q , R in S označimo pravokotne projekcije točke Y na premice AX , BX , AZ in BZ zaporedoma. Dokaži, da je $\angle XOZ$ dvakrat večji od ostrega kota med premicama PQ in RS .
3. Naj bo H višinska točka trikotnika ABC . Naj bosta M in N sta razpolovišči stranic AB in AC zaporedoma. Denimo, da H leži v notranjosti štirikotnika $BMNC$ in da sta si očrtani krožnici trikotnikov BMH in CNH tangentni. Premica skozi H vzporedna z BC seka očrtani krožnici trikotnikov BMH in CNH v točkah K in L zaporedoma. Naj bo F presečišče premic MK in NL ter naj bo J središče včrtane krožnice trikotnika MHN . Dokaži, da je $|FJ| = |FA|$.
4. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, kjer $|AC| > |BC|$, in ω njegova včrtana krožnica s središčem I . Krožnica ω se dotika stranic BC in AC v D in E zaporedoma. Naj bo M taka točka na ω , da velja $BM \parallel DE$ ter da M in B ležita na istem bregu premice CI . Naj bosta F in H drugi presečišči premic BM in CM z ω zaporedoma. Naj bo J taka točka na premici AC , da velja $JM \parallel EH$, in naj bo K drugo presečišče premice JF z ω . Dokaži, da je $ME \parallel KH$.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **14. 12. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »3. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a
ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

izjavljam, da sem vse naloge reševal/a

kraj in datum

Podpis:

Rešitve

1. **1. način:** Dovolj je dokazati enakost $\angle BIC = \angle BJC$. Ker sta I in J središči trikotnika ABC in DBC vrtanih krožnic, velja

$$\angle BIC = \pi - \angle ICB - \angle CBI = \pi - \frac{\angle ACB}{2} - \frac{\angle BCA}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle BAC}{2}$$

in

$$\angle BJC = \pi - \angle JCB - \angle CBJ = \pi - \frac{\angle DCB}{2} - \frac{\angle BCD}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle BDC}{2}.$$

Ker so točke A , B , C in D konciklične, pa velja še

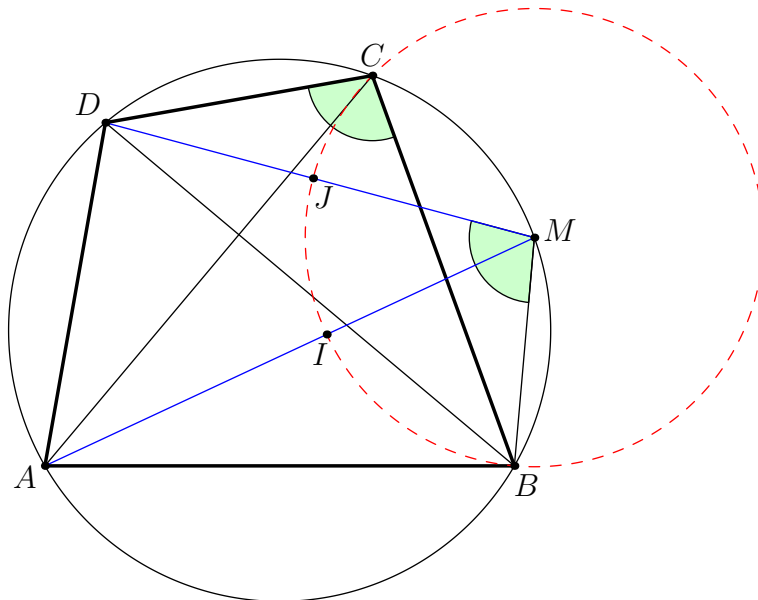
$$\angle BIC = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle BDC}{2} = \angle BJC.$$

- 2. način:** Naj bo M razpolovišče loka BC , ki ne vsebuje A . Pokažimo, da je M središče očrtane krožnice štirikotnika $IJBC$.

Z uporabo dejstva, da je CJ simetrala $\angle DCB$, dobimo

$$2 \cdot \angle JCB = \angle DCB = \angle DMB = \angle JMB.$$

Vemo namreč, da M leži na simetrali kota pri D . Iz izreka o središčnem in obodnem kotu in dejstva $|CM| = |MB|$ sklepamo, da je M središče očrtane krožnice trikotnika JCB .¹ Analogno je M središče očrtane krožnice trikotnika ICB . Sledi, da I , J , B in C ležijo na krožnici s središčem M .



2. Naj bo N pravokotna projekcija točke Y na stranico AB . Konfiguracija nas spomni na Simsonov izrek. Ker točka Y leži na očrtani krožnici trikotnika ABX , so njene pravokotne projekcije na stranice AB , BX in XA , t.j. točke N , Q in P , kolinearne. Simsonov izrek

¹To lahko sklepamo tudi direktno z uporabo incenter-excenter leme.

ponovimo na trikotniku ABZ in dobimo, da so tudi točke N , R in S kolinearne. Premici PQ in RS se torej sekata v točki N . Zaradi pravih kotov

$$\angle APY = \angle ARY = \angle ANY = 90^\circ$$

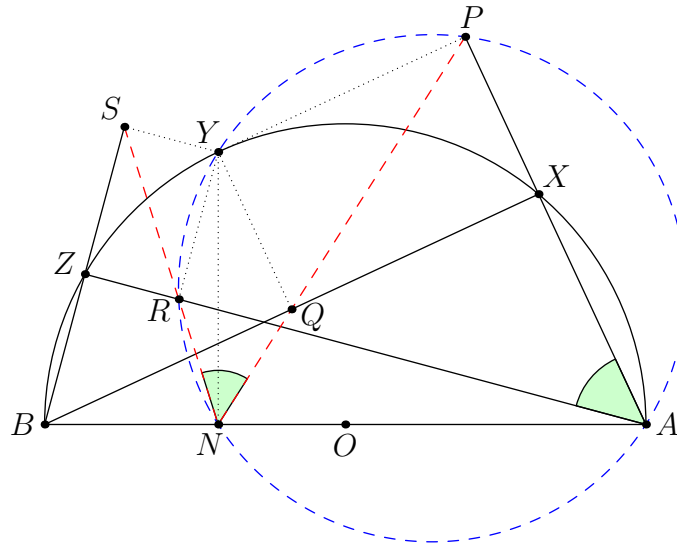
sledi, da so točke A , P , Y , R in N konciklične. Z uporabo izreka o središčnem in obodnem kotu tako dobimo

$$\angle XOZ = 2 \cdot \angle XAZ = 2 \cdot \angle PAR = 2 \cdot \angle PNR,$$

kjer smo pri tretjem enačaju uporabili tetivnost štirikotnika $PRNA$. Ker je

$$\angle PNR = \angle XAZ < 90^\circ,$$

je to res ostri kot med premicama PQ in RS . Trditev je tako dokazana.



3. Dokazali bomo močnejšo trditev, in sicer da A , M , J in N ležijo na krožnici s središčem v F . Od tod bo sledilo, da sta daljici AF in JF polmera iste krožnice, zato sta enako dolgi.

Naj bosta D in E nožišči višin trikotnika ABC iz B in C zaporedoma. Po Talesovem izreku so točke B , C , E in D konciklične. Ker je NM srednjica v trikotniku ABC , velja $NM \parallel BC \parallel KL$.

Z uporabo teh dejstev lahko dokažemo, da je trikotnik FKL enakokrak z vrhom v F . Velja namreč

$$\angle LKF = \angle HKM \stackrel{(1)}{=} \angle HBM = \angle DBE \stackrel{(2)}{=} \angle DCE = \angle NCH \stackrel{(1)}{=} \angle NLH = \angle FLK,$$

pri čemer smo uporabili krožnici iz navodila (1) in tetivnost štirikotnika $BCED$ (2). Ker pa velja $MN \parallel KL$, je

$$\angle NMF = \angle LKF = \angle FLK = \angle FNM,$$

zato je enakokrak tudi trikotnik FNM . Posebej, velja $|FM| = |FN|$.

Naj bo t skupna tangenta očrtanih krožnic (HBM) in (HCN) . Potem velja

$$\begin{aligned}\angle NHM &= \angle(NH, t) + \angle(t, HM) \\ &= \angle NLH + \angle HKM \\ &= \angle FLK + \angle LKF \\ &= -\angle KFL \\ &= -\angle MFN,\end{aligned}$$

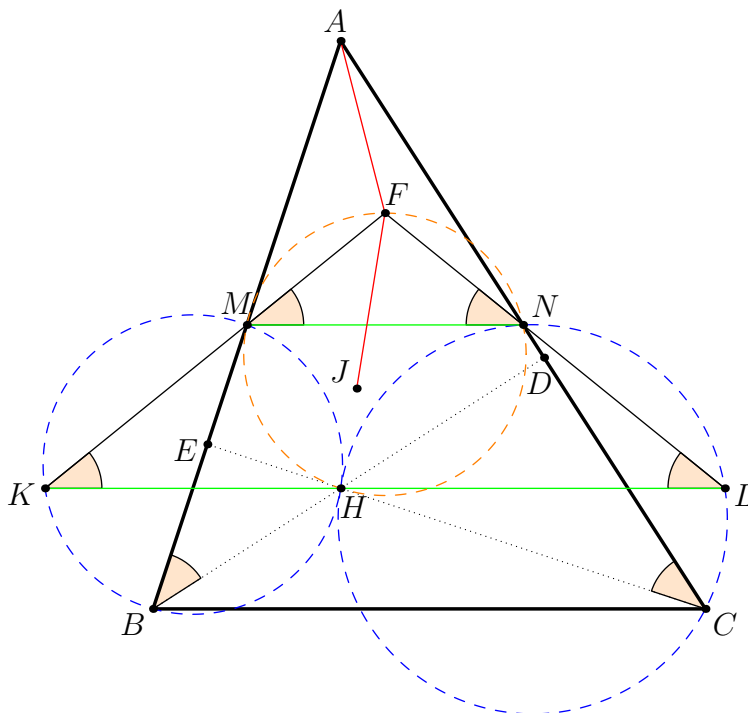
kjer smo pri drugem enačaju uporabili izrek o kotu med tetivo in tangento. Iz te enakosti kotov sledi, da so točke F , M , H in N konciklične.

Opazimo, da F leži na drugem bregu premice MN kot točka H . Iz enakosti dolžin $|FM| = |FN|$ tako sledi, da je F razpolovišče loka NM te krožnice, ki ne vsebuje točke H . Po incenter-excenter lemi je F središče očrtane krožnice trikotnika NJM .

Preostane nam še, da dokažemo, da tudi točka A leži na tej krožnici. Izrazimo lahko

$$\angle MAN = \frac{\pi}{2} - \angle DBA = \frac{\pi}{2} - \angle HKM = \frac{\pi}{2} - \angle LKF = \frac{1}{2}(\pi - 2\angle LKF) = \frac{1}{2}\angle MFN,$$

kjer smo po vrsti uporabili $AC \perp BD$, koncikličnost točk B, H, M in K , in enakokrakost trikotnika FKL . Po izreku o obodnem in središčnem kotu točka A res leži na tej krožnici.



4. Uporabljali bomo usmerjene kote.

Ker je $MF \parallel DE$, je $DEFM$ enakokraki trapez. Zaradi tangentnih odsekov velja enakost $|CD| = |CE|$, zato C leži na simetrali tega trapeza. Posebej velja, da sta trikotnika CDM in CEF skladna.

Sedaj opazimo, da po izreku o kotu med tangento in tetivo velja $\angle DMC = \angle CDH$. Trikotnika CDM in CHD imata tako poleg kotov pri C še en par enakih kotov, zato sta podobna. Tako sledi, da sta podobna tudi trikotnika CDH in CFE .

Sedaj trdimo, da sta podobna še trikotnika EFJ in HDM . Res, velja

$$\angle JEF = \angle EDF = \angle MED = \angle MHD,$$

pri čemer smo uporabili izrek o kotu med tangento in tetivo ter dejstvo, da je $DEFM$ enakokrak trapez. Poleg tega pa je

$$\frac{|EJ|}{|HM|} = \frac{|CE|}{|CH|} = \frac{|EF|}{|HD|},$$

kjer smo zaporedoma uporabili Talesov izrek o vzporednicah in podobnost trikotnikov CDH ter CFE . Sledi, da je $\frac{|EJ|}{|EF|} = \frac{|HM|}{|HD|}$. Skupaj z zgornjo enakostjo kotov to res implicira, da sta trikotnika EFJ in HDM podobna.

Sedaj lahko izrazimo

$$\angle MEH = \angle MDH = \angle JFE = \angle KFE = \angle KHE,$$

od koder res sledi, da sta premici KH in ME vzporedni.

